Introduzione alle equazioni di Eulero-Lagrange e ai potenziali generalizzati

G.Falqui, Dipartimento di Matematica e Applicazioni,
Università di Milano–Bicocca.

Corso di Sistemi Dinamici e Meccanica Classica, a.a. 2008/2009.

Prima versione, 1 Dicembre 2008.
Commenti e correzioni sono benvenuti.
Queste note riportano il contenuto (di parte) della lezione tenuta nell'Ottagono della Galleria Vittorio Emanuele. Sono basate, in buona parte, sul libro di H. Goldstein, Meccanica Classica, Zanichelli, (Bologna, 1970), §1.5.

Indice

1 La Lagrangiana di una particella in una campo di forze potenziale

Consideriamo l'equazione di Newton per una particella di massa m in un campo di forze con potenziale $U(\mathbf{r};t)$:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U(\mathbf{r};t)}{\partial \mathbf{r}}. \tag{1.1}$$

Ricordiamo che questa è una notazione compatta per il sistema di tre equazioni

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -\dfrac{\partial U(x,y,z;t)}{\partial x} \\[2ex] m\ddot{y} &= -\dfrac{\partial U(x,y,z;t)}{\partial y} \\[2ex] m\ddot{z} &= -\dfrac{\partial U(x,y,z;t)}{\partial z} \end{cases}, \tag{1.2}$$

dove si intende che (x, y, z) siano le coordinate di $\mathbf{r}$ in un riferimento Galileiano.

Fatto 1. *Le equazioni di Newton (1.1) sono equivalenti alle equazioni*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\mathbf{r}}, \tag{1.3}$$

dove la funzione Lagrangiana*, (o Lagrangiana* tout-court*) della particella di massa m nel potenziale $U(\mathbf{r})$ è data da*

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 - U(\mathbf{r}; t), \tag{1.4}$$

cioè dalla differenza *tra l'energia cinetica $T = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2$ della particella e la sua energia potenziale $U(\mathbf{r}; t)$.*

Dimostrazione. Nel caso della Lagrangiana considerata (1.4) si ha

$$\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}}, \quad \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\mathbf{r}} = -\frac{\partial\,U(\mathbf{r}; t)}{\partial\,\mathbf{r}}.$$

Dunque la affermazione si trova semplicemente notando che

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\dot{\mathbf{r}}} = \frac{d}{dt}m\dot{r} = m\ddot{\mathbf{r}}.$$

□

È forse utile rimarcare che, come nel caso delle equazioni di Newton, l'equazione (1.3) è un modo compatto per esprimere il sistema di tre equazioni (differenziali del secondo ordine)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\dot{x}} & = & -\dfrac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,x} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\dot{y}} & = & -\dfrac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,y} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\dot{z}} & = & -\dfrac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,z} \end{cases}, \tag{1.5}$$

dove, per non appesantire la notazione, abbiamo omesso di scrivere la dipendenza dalle coordinate di $\mathcal{L}$, (si dovrebbe leggere $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t)$).

La rilevanza ed utilità della formulazione tramite la Lagrangiana qui presentata delle equazioni del moto verrà discussa in lezioni successive. In queste note ci interessa fare vedere che la classe di equazioni di Newton per una particella che ammettono formulazione Lagrangiana comprende, oltre che quelle in cui la forza $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ammette potenziale, una classe particolare di forze che dipendono anche dalla velocità; in particolare, considerermo le forze che governano il moto di una particella carica in un campo elettromagnetico assegnato.

2 Le equazioni di Maxwell

È fuori luogo qui discutere in dettaglio le equazioni di Maxwell che governano i fenomeni elettromagnetici, e che sono sostanzialmente argomento dei corsi di Fisica II (CdL in Fisica) e Introduzione alla Fisica Moderna (CdL in Matematica). Qui le ricorderemo brevemente; a questo proposito è però necessario premettere un altro breve *reminder* sugli operatori vettoriali in coordinate cartesiane.

2.1 Operatori Vettoriali in Coordinate Cartesiane

Le coordinate cartesiane godono della importante proprietà che, in ogni punto, gli elementi della base mobile sono i traslati paralleli a se stessi dei corrispondenti elementi della base in ogni altro punto, e.g., nel punto origine. Si può sintetizzare questa situazione con le formule

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{i},\ \mathbf{e}_y = \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k} \qquad \forall\, \mathbf{x},$$

anche se è bene ricordare che i vettori sono, in generale, applicati in punti diversi. La figura (2.1) illustra la situazione. Le curve coordinate sono molto semplici. Per esempio le x-curve coordinate sono le rette $\{x = t, y = y_0, z = z_0\}, t \in \mathbb{R}$ parallele all'asse x. Le superfici coordinate (ancora ad esempio le x-superfici) sono i piani di equazione $x = x_0$ (cioè piani paralleli al piano (yz)), e così via.
Gli elementi di linea sono dx, dy, dz, quelli di superficie, rispettivamente,

$$dy\, dz,\ dz\, dx,\ dx\, dy,$$

e l'elemento di volume è $dV = dx\, dy\, dz$. Gli operatori differenziali hanno la forma familiare dal corso di Analisi II, ovvero, con ovvio significato dei simboli:

i) Gradiente: $\nabla\varphi = \partial_x\varphi\mathbf{i} + \partial_y\varphi\mathbf{j} + \partial_z\varphi\mathbf{k}$

ii) Rotore:

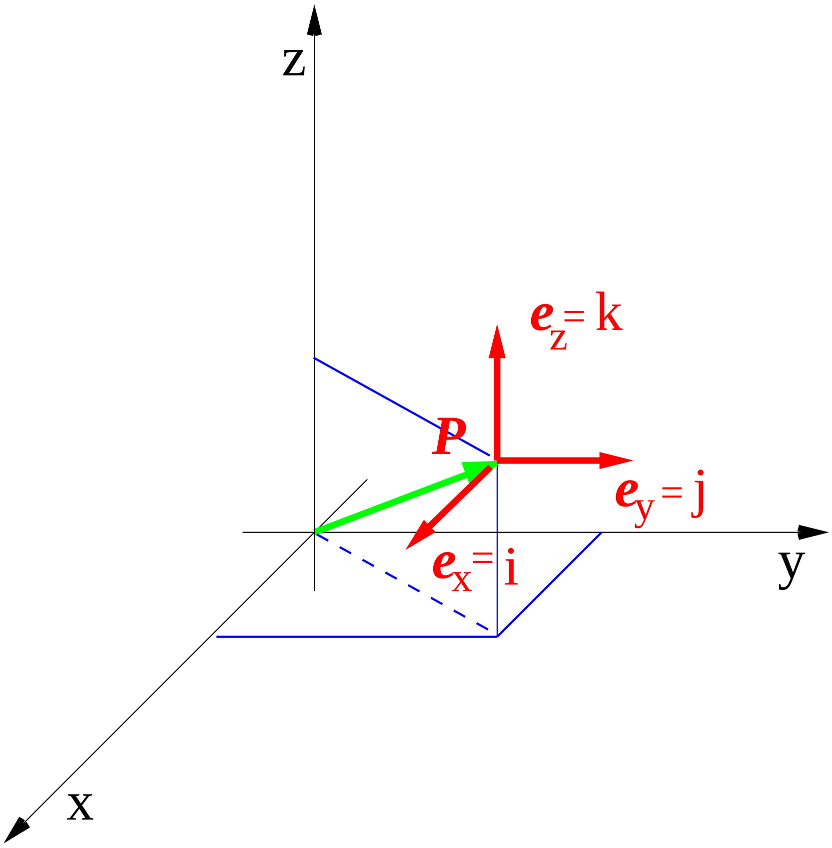
$$\nabla \times \mathbf{E} = (\partial_y\mathbf{E}_z - \partial_z\mathbf{E}_y)\mathbf{i} + (\partial_z\mathbf{E}_x - \partial_x\mathbf{E}_z)\mathbf{j} + (\partial_x\mathbf{E}_y - \partial_y\mathbf{E}_x)\mathbf{k},$$

o, nella fomula più compatta,

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \mathbf{E}_x & \mathbf{E}_y & \mathbf{E}_z \end{bmatrix}.$$

iii) Divergenza: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial_x\mathbf{E}_x + \partial_y\mathbf{E}_y + \partial_z\mathbf{E}_z$,

Figura 1: Coordinate cartesiane



e per il Laplaciano si ha

$$\triangle\varphi = \partial_x^2\varphi + \partial_y^2\varphi + \partial_z^2\varphi.$$

Si ricordano anche le formule fondamentali che collegano i tre operatori, che simbolicamente scriviamo come

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = 0 \,\forall\, \varphi; \qquad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0 \,\forall\, \mathbf{E}, \tag{2.1}$$

cioè che il rotore di un gradiente si annulla, e così pure la divergenza di un rotore. Dalla topologia differenziale è noto che le formule (2.1) si possono invertire sotto opportune condizioni sulla topologia dell'aperto di $\mathbb{R}$ sul quale il campo scalare φ e/o il campo vettoriale $\mathbf{E}$ sono definiti. Senza scendere in dettagli ricordiamo il seguente

Teorema 1. *Sia $\mathfrak{U}$ un aperto contraibile di $\mathbb{R}^3$, ovvero sia possibile trovare un punto $\mathbf{x_0} \in \mathfrak{U}$ e definire una funzione continua $F_{\mathbf{x}_0} : \mathfrak{U} \times [0,1] \to \mathfrak{U}$ tale che:*

$$F_{\mathbf{x_0}}(\mathbf{x}; 0) = \mathbf{x},\ \forall x \in \mathfrak{U}$$
$$F_{\mathbf{x_0}}(\mathbf{x}; 1) = \mathbf{x}_0,\ \forall x \in \mathfrak{U}.$$

Allora, se $\mathbf{E}$ *è un campo vettoriale* $\mathcal{C}^1$ *su* $\mathcal{U}$*, vale che*

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{E}) = 0 \Rightarrow \exists \varphi : \; \mathbf{E} = \nabla\varphi. \\ \nabla \cdot (\mathbf{E}) = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{A} : \; \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{A}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Torniamo ora alle equazioni di Maxwell. Si chiama sistema di equazioni di Maxwell (nel vuoto) il sistema di quattro equazioni per i campi elettrico $\mathbf{E}$ e magnetico $\mathbf{B}$, pensate come funzioni sullo spazio–tempo, che in opportune unità di misura (unità di Gauss) si scrive nel seguente modo:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{(Il campo magnetico non ha sorgenti)} \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{(Legge di Faraday)} \tag{2.4}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{(Legge di Coulomb)} \tag{2.5}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \quad \text{(Legge di Ampère–Maxwell).} \tag{2.6}$$

I campi (rispettivamente, scalare e vettoriale) ρ e $\mathbf{j}$ che compaiono al membro di destra delle ultime due equazioni sono la densità di carica ρ e l'intensità di corrente $\mathbf{j}$; esse sono legate dalla equazione di conservazione della carica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \tag{2.7}$$

Consideriamo ora le equazioni (2.3,2.4), ovvero le equazioni omogenee. Supponendo valide le ipotesi del Teorema 1. Allora, dalla seconda delle (2.2) abbiamo

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{2.8}$$

Sostituendo questo risultato nella (2.4) otteniamo

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times (\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0. \tag{2.9}$$

Dalla prima equazione (2.2) possiamo dunque porre

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi. \tag{2.10}$$

Il campo scalare Φ ed il campo vettoriale $\mathbf{A}$ si chiamano, rispettivamente, potenziale scalare e potenziale vettore del campo elettromagnetico $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$.

È utile notare la seguente proprietà dei portenziali scalare e vettore, ovvero che non sono univocamente definiti. Infatti, posto

$$(\Phi', \mathbf{A}') = (\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \lambda}{\partial t}, \mathbf{A} + \nabla\lambda), \tag{2.11}$$

per una arbitraria funzione $\lambda = \lambda(\mathbf{r}, t)$ (regolare) sullo spazio-tempo, vediamo che le equazioni (2.8,2.10) sono soddisfatte da $(\Phi, \mathbf{A})$ se e solo se lo sono da $(\Phi', \mathbf{A}')$.

L'invarianza espressa da (2.11) si chiama *invarianza di gauge*.

3 La forza di Lorenz e il formalismo di Lagrange

Consideriamo un particella di massa m e carica elettrica q che si muove con velocità $\mathbf{v}$ in un campo elettromagnetico $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Allora sperimentalmente si sa che su di essa agisce una forza $\mathbf{F}$ data da[1]

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})). \tag{3.1}$$

La costante c è la velocità della luce nel vuoto. Dunque le equazioni di Newton che governano il moto della particella saranno

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})). \tag{3.2}$$

In altre parole, la forza che agisce sulla particella è data dalla forza di Coulomb dovuta al campo elettrico $\mathbf{E}$, ed alla forza di interazione con il campo magnetico $\mathbf{F_L} = \frac{q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Quest'ultima forza è detta forza di Lorenz. Notiamo che la forza di Lorenz ha sempre potenza nulla.

Utilizzando le espressioni (2.8) e (2.10), scivere (3.1) nei termini dei potenziali scalare e vettore Φ e $\mathbf{A}$ come

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\left(-\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\,\mathbf{A}}{\partial\,t} + \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}))\right). \tag{3.3}$$

Teorema 2. *Le equazioni di Newton (3.3) si possono derivare, nel formalismo Lagrangiano, dalla Lagrangiana*

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) = \frac{m}{2}|\dot{r}|^2 + \frac{q}{c}(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - q\Phi, \tag{3.4}$$

ovvero sono le equazioni di Eulero-Lagrange definite da

$$\mathcal{L} = T - U^{gen}, \quad \text{con } U^{gen} = q\Phi - \frac{q}{c}(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}),$$

cioè da un potenziale generalizzato, *dipendente dalla velocità* $\dot{\mathbf{r}}$, *dato esplicitamente dalla somma dell'energia potenziale della forza elettrica* $q\Phi$ *meno il prodotto scalare tra il potenziale vettore* $\mathbf{A}$ *e il rapporto tra la velocità della particella e quella della luce nel vuoto.*

Dimostrazione. Esplicitamente, dobbiamo mostrare che le equazioni di Eulero-Lagrange definite da (3.4), cioè

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\mathbf{r}}, \tag{3.5}$$

[1] Consistentemente con la notazione $\nabla\times$ utilizzata in queste note per il rotore, denoteremo con $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ il prodotto vettoriale tra i vettori $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

coincidono con le equazioni (3.3). Consideriamo una componente di queste equazioni vettoriali, per esempio la componente x.

Abbiamo:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}} = m\,\dot{x} + A_x,$$

e dunque,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}(m\,\dot{x} + A_x) = m\ddot{x} + (\frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}), \tag{3.6}$$

dato che $A_x \equiv A_x(x, y, z, ; t)$, e quindi, per il teorema della funzione composta, denotando con $\frac{\partial A_x}{\partial t}$ la derivata parziale rispetto a t della componente A_x, si ha

$$\frac{d}{dt}(A_x) = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}.$$

D'altro canto,

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} = -q\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{r}}) = -q\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{q}{c}(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}). \tag{3.7}$$

Uguagliando (3.6) a (3.7), osserviamo che i termini $\frac{q}{c}\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}$ si elidono, e gli altri danno luogo (raccogliendo rispetto ad $\dot{y}$ e $\dot{z}$) all'equazione

$$m\ddot{x} = -q\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{q}{c}\left(\dot{y}\Big(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Big) - \dot{z}\Big(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\Big)\right). \tag{3.8}$$

Osservando che

$$(\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}))_x = \left(\dot{y}\Big(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Big) - \dot{z}\Big(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\Big)\right)$$

otteniamo dunque che la componente x delle equazione di Eulero Lagrange relative alla Lagrangiana $\mathfrak{L}$ data da (3.4) coincide con la componente x delle equazioni di Newton (3.3). La dimostrazione si conclude osservando che, *mutatis mutandis* gli stessi argomenti si possono ripetere per le componenti y e z.

$\square$